

XXXVI Seminario del C.R.D. "U. Morin" - Paderno del Grappa, 27- 30 agosto 2007

"I DINTORNI DELL'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA:
PERCORSI, STRUMENTI, ASPETTI MOTIVAZIONALI, ATTEGGIAMENTI.
IL CASO DELLA GEOMETRIA"

Uno strumento per insegnare e apprendere la geometria dello spazio: visualizzazione ed esplorazioni dinamiche con *Cabri 3D*

Luigi Tomasi
L.S. "G. Galilei" Adria - SSIS Università di Ferrara
luigi.tomasi@unife.it

Alcuni temi che saranno discussi in questa relazione

- Uso delle tecnologie informatiche al fine di facilitare l'insegnamento di argomenti di geometria 3D che si ritengono fondamentali nel curriculum di matematica.
- Ruolo della **visualizzazione dinamica** permessa dai "sistemi di geometria dinamica" (DGS) nell'apprendimento insegnamento della geometria dello spazio.
- Analisi delle difficoltà (non solo degli studenti...) nella **rappresentazione di oggetti 3D**.
- Qualche proposta di percorso didattico di geometria dello spazio per la scuola secondaria [e per gli studenti della SSIS e per insegnanti di scuola secondaria].

Domande-guida della relazione

(alle quali tenterò di dare qualche risposta,...)

- È possibile anche per la geometria dello spazio usare il software per progettare delle attività che portino a formulare congetture, così come è stato sperimentato per la geometria del piano, ad esempio con il software *Cabri* ?
- Si può intraprendere qualche strada nuova per l'insegnamento della geometria dello spazio e affrontare l'argomento in modo più motivante e nello stesso tempo più efficace?
- È possibile collegare nell'insegnamento la geometria dello spazio e la geometria del piano?

Cosa posso fare con *Cabri 3D* ? (dal punto di vista didattico...)

- Cosa può fare un insegnante con un software di geometria come *Cabri 3D* ?
- Quali problemi di insegnamento e apprendimento della geometria dello spazio si possono superare?
- Esplorare alcune delle potenzialità delle tecnologie informatiche, e inserire questo in un quadro preciso e verificato...
- Nello stesso tempo esaminare le difficoltà, i problemi, le concezioni sbagliate che possono insorgere quando si usano le tecnologie (questo fa parte di un problema più generale, che si pone anche se non si usano le tecnologie...)
- Vantaggi della visualizzazione dinamica (in 3D): esistono? Come si possono verificare?

Difficoltà degli studenti nello studio della geometria dello spazio

- Difficoltà con il disegno di oggetti 3D (questo riguarda quasi tutti, anche gli insegnanti...)
- Conoscenze non adeguate di geometria del piano
- Poca intuizione spaziale... ; difficoltà di visualizzazione e a "vedere nello spazio".

Insegnamento e difficoltà degli studenti nella geometria 3D

Alcune delle difficoltà degli allievi sono probabilmente una conseguenza di come la geometria solida viene insegnata:

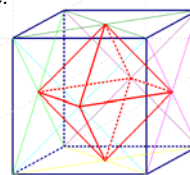
- insegnamento prevalentemente "cartaceo" (libro di testo, quaderno, disegni "carta e matita",...)
- basato su disegni alla lavagna (difficili da realizzare dalla maggior parte degli insegnanti)
- mancanza di visualizzazione (al massimo si usano dei modelli statici)
- La rappresentazione viene fatta in un piano (questo è vero anche per i DGS...); ma soprattutto nella geometria dello spazio una figura fatta male può provocare idee sbagliate (al contrario di quel che succede per il piano: vedi "battuta" di Polya).

Rappresentazione degli oggetti 3D e software di geometria dinamica

Il problema della rappresentazione assonometria o prospettiva?

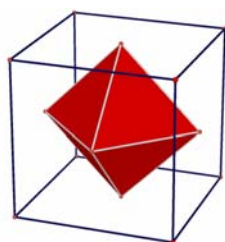
Un problema di "Flatlandia", rubrica di problemi IRRE E R (febbraio 2006) e il [disegno di un'allieva di III media](#)
Congiungendo i centri delle facce (con uno spigolo in comune) di un cubo si ottengono gli spigoli di un poliedro.
 1) Di quale poliedro si tratta? È regolare?
 2) Determinare il rapporto fra il suo volume e quello del cubo. Motivare le risposte.

figura inviata dall'allieva, eseguita con Cabri II Plus

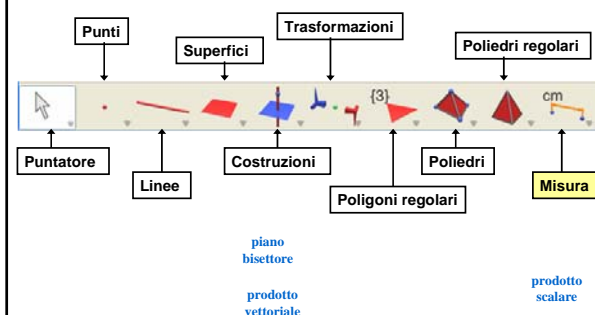


Il problema della rappresentazione assonometria o prospettiva?

la stessa figura con il software Cabri 3D



Gli strumenti di Cabri 3D (vers. 2)



Geometria dello spazio e strumenti di Cabri 3D

- Le primitive geometriche a disposizione permettono di costruire figure di geometria euclidea dello spazio senza conoscere i metodi di rappresentazione come ad es. l'assonometria o la prospettiva
 - si può "disegnare nello spazio" in modo più agevole rispetto all'uso degli strumenti tradizionali
- ma soprattutto:
- le figure ottenute sono facilmente manipolabili mediante il trascinamento o ruotando il punto di vista, ovvero, **la figura è dinamica!**

Geometria dello spazio e strumenti di Cabri 3D (continuazione...)

Ad ogni primitiva o costruzione di Cabri 3D corrispondono elementi della teoria geometrica:

- assiomi
 - teoremi
 - proprietà
- che ne assicurano il funzionamento geometrico, ossia il funzionamento corretto rispetto alla teoria geometrica (M.A. Mariotti).

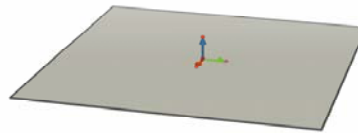
e ancora...

“Il software offre dunque comandi e modi d’uso che rimandano al significato teorico di **costruzione**, ed in particolare al significato di **assioma** e di **teorema**, in breve al significato di **sistema teorico**.

E’ in questo senso che **comandi e modi d’uso** possono contribuire alla **costruzione** di tali significati da parte degli allievi.”

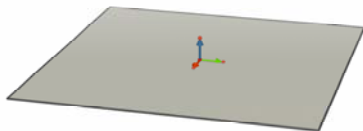
(M.A. Mariotti).

Il piano di base e la rappresentazione degli oggetti in *Cabri 3D*

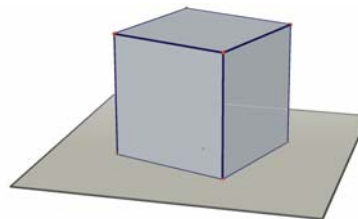


Il piano di riferimento:

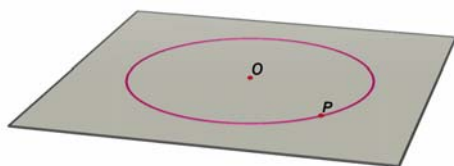
il pericolo degli “stereotipi” e delle direzioni privilegiate (“orizzontale”, “obliquo”, “verticale”,...) influenzate dall’esperienza fisica, ma che non hanno senso dal punto di vista geometrico viene superato con la possibilità di ruotare facilmente il punto di vista ...



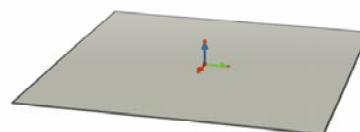
La rappresentazione di un cubo...



Questa è una circonferenza!



Un problema iniziale nell’uso di *Cabri 3D*: come si creano i punti?



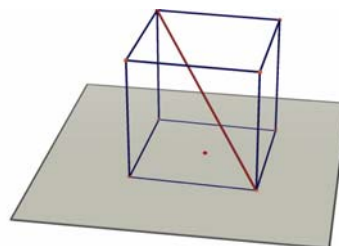
Percorsi didattici di *geometria* (dello spazio) che si possono proporre con l'uso di uno strumento come *Cabri 3D*

Percorsi di geometria (dello spazio): esempi con Cabri 3D

- Rette e piani nello spazio
- Poliedri (prismi, piramidi, poliedri regolari)
- Costruzioni "con riga e compasso" nello spazio
- Sezioni di un cubo
- Poliedri regolari
- Simmetrie dei poliedri regolari
- Equiscomponibilità ed equiestensione tra poliedri
- Trasformazioni geometriche dello spazio (isometrie e omotetie)
- Poliedri archimedei
- Sezioni di un (doppio) cono
- Un po' di geometria sulla sfera.

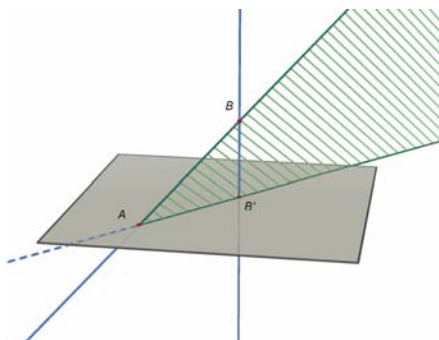
Rette e piani nello spazio

Problema:
Dato un cubo e una sua diagonale, qual è l'angolo tra questa diagonale e il piano di una faccia?



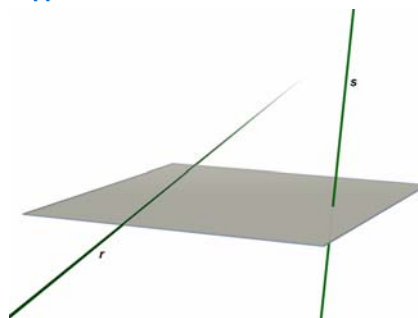
Angolo tra una retta e un piano

Domande: cosa si deve sapere prima?
è la stessa cosa usare *Cabri 3D* oppure soltanto il libro di testo e gli strumenti tradizionali?



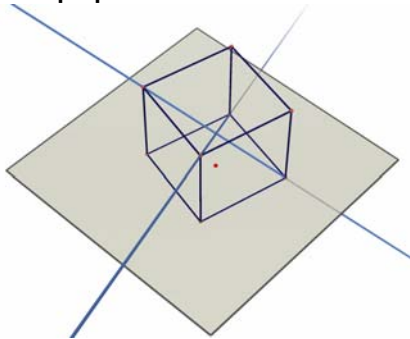
Distanza tra due rette sghembe

Stessa domanda fatta in precedenza: cosa si deve sapere prima?
E' la stessa cosa usare *Cabri 3D* per fare questa costruzione oppure usare soltanto il libro di testo o la lavagna?

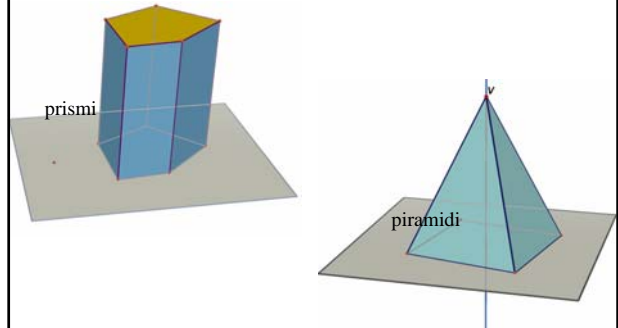


Problema:

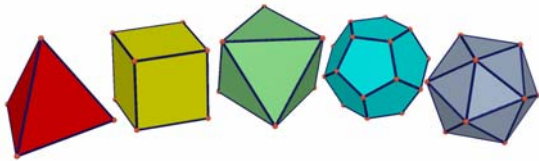
Dato un cubo, considerare due sue diagonali:
sono tra loro perpendicolari?



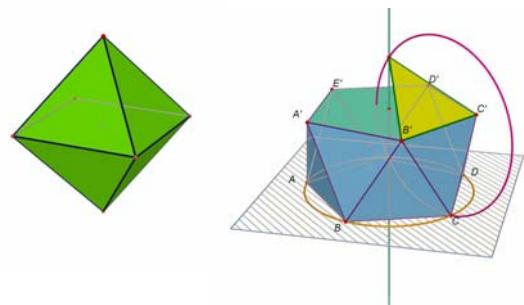
Le costruzioni dipendono dagli strumenti del software → percorsi didattici diversi e diverse definizioni



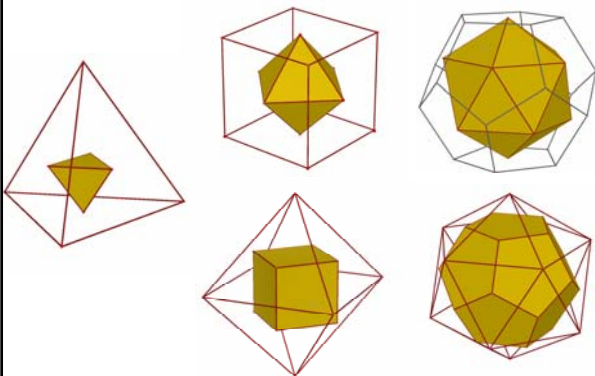
I poliedri regolari (solidi platonici):
il problema della definizione di poliedro regolare



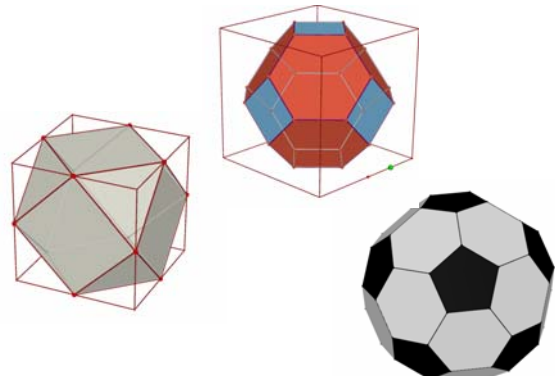
Diverse possibilità di costruire un poliedro regolare: costruzioni con "riga e compasso nello spazio"



Dualità tra i poliedri regolari

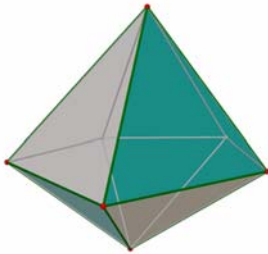


Costruzioni: alcuni poliedri archimedei



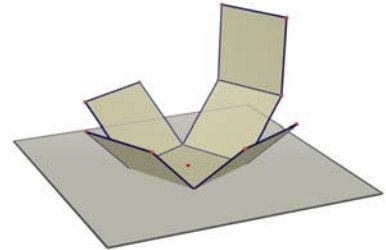
**La formula di Eulero (1707-1783)
per i poliedri**

$$V + F = S + ?$$

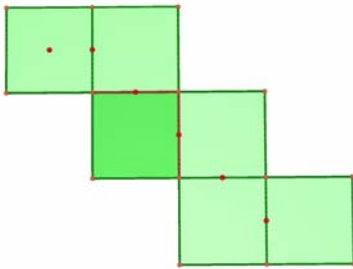


**Sviluppo di un poliedro
(e costruzione di un modello)**

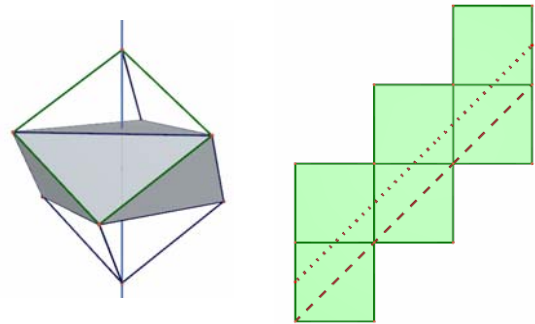
dallo spazio al piano; possibile difficoltà didattica:
Cabri 3D fornisce *un solo* sviluppo di un poliedro



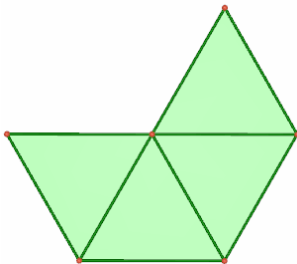
Questo è lo sviluppo di un cubo?
dal piano allo spazio e viceversa



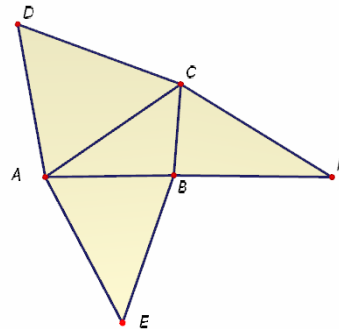
**Un solido più complicato da
sviluppare... (dallo spazio al piano e viceversa)**



**Questo è lo sviluppo di un
tetraedro regolare?**



Questo è lo sviluppo di un tetraedro?
dal piano allo spazio e viceversa



Un quesito

(dato a una prova di ammissione all'Università, Ingegneria)
→vedi indagine di G.Accascina (a cura di),
La strage degli innocenti, CRD Morin, 1998.

Un piano interseca una sfera; qual è la forma della sezione?

- A) un cerchio oppure un'ellisse
- B) un cerchio
- C) una calotta sferica
- D) un settore circolare.

Esito....

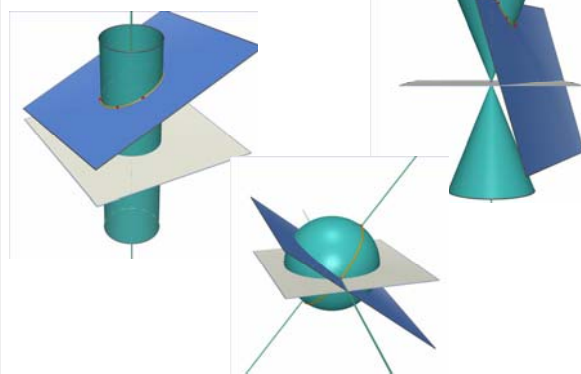
49% degli studenti hanno dato la risposta B

24% hanno risposto A

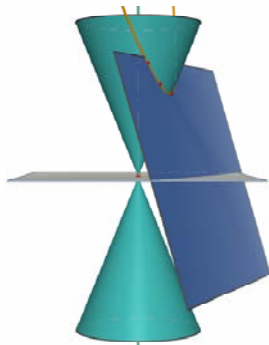
21% hanno risposto C

vedi G. Accascina (1998); M.A. Mariotti (2005)

Cilindro, cono e sfera

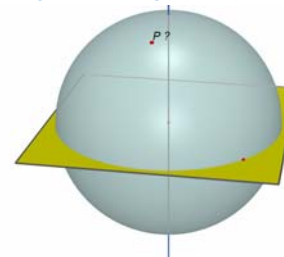


Sezioni coniche (dallo spazio al piano)



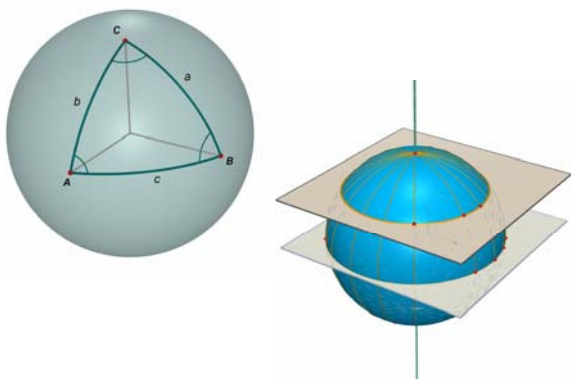
Problema

Un orso, inizialmente in un punto P , si sposta di due miglia verso sud. Poi cambia direzione e percorre un miglio verso est. Poi si volge a sinistra e così, dopo aver percorso due miglia verso nord, si ritrova al punto P di partenza. Di che colore è la pelliccia di questo orso?

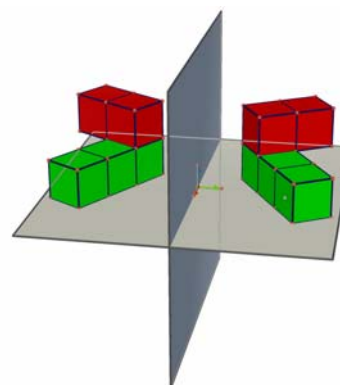


G. Polya, *Come risolvere i problemi di matematica* (p. 230)

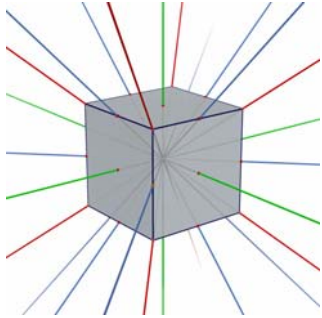
Un po' di geometria della sfera



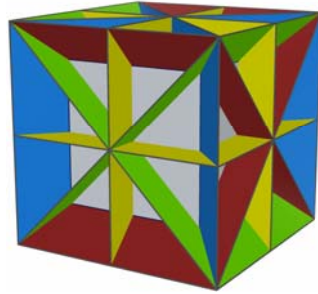
Trasformazioni nello spazio



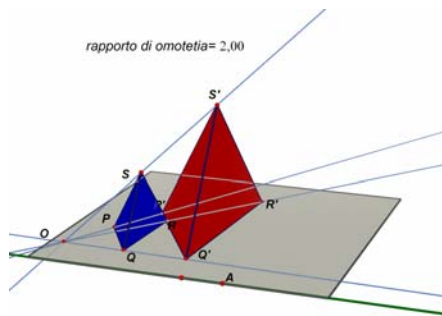
Assi di rotazione di un cubo



Piani di simmetria di un cubo

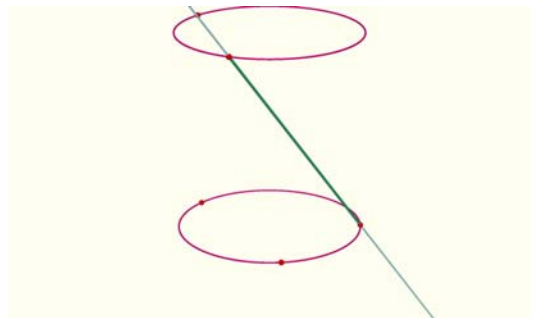


Similitudine

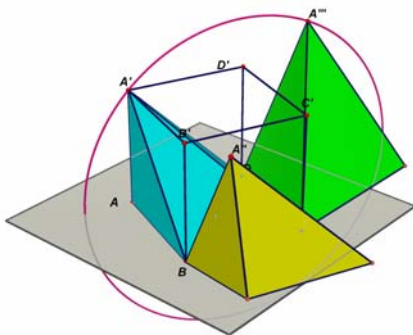


Animazione e traccia

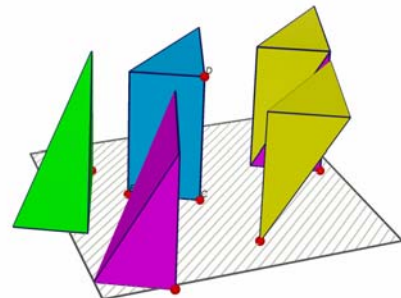
(strumenti per la scoperta di proprietà)



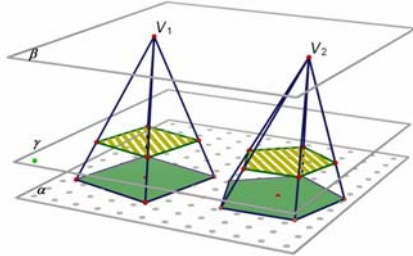
Equivalenza nello spazio: cubo scomposto in tre piramidi



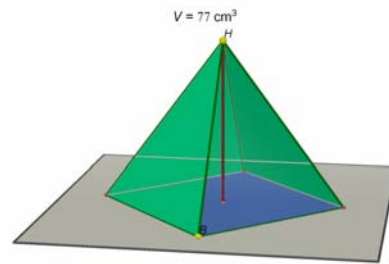
Equivalenza nello spazio: prisma e piramide triangolari



Principio di Cavalieri



Misura nello spazio



$$h = 5,9 \text{ cm} \quad S = 39 \text{ cm}^2$$
$$S \cdot h = 230 \text{ cm}^3 \quad S \cdot h / V = 3$$

Domanda-guida:

Si può fare geometria analitica dello spazio senza conoscere quella sintetica?

L'algebra lineare è uno strumento molto potente, ma...

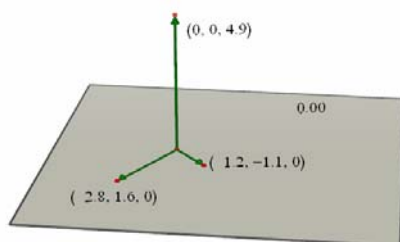
Si può "fare" solo algebra lineare, come spesso succede all'università?

Cosa apprende uno studente di geometria dello spazio se impara soltanto l'algebra lineare? L'algebra lineare viene capita veramente?

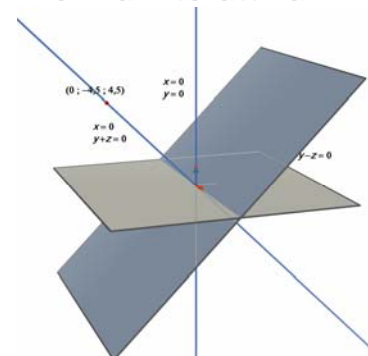
Conseguenza didattica: prima la geometria dello spazio poi... i vettori in 2 e 3 dimensioni e poi l'algebra lineare (per evitare l'esperienza negativa fatta nella scuola secondaria superiore in Francia sull'onda del bourbakismo...)

→ Si potrebbe dire: Abbasso Diedonné!

Coordinate e vettori nello spazio in forma interattiva



Geometria analitica dello spazio in forma interattiva



Conclusioni e prospettive (da sperimentare)

- Sperimentare dei percorsi didattici di geometria dello spazio e osservare gli allievi alle prese con il software Cabri 3D.
- Il software permette di esaminare l'approccio sintetico integrato con quello analitico.
- Studio delle false opinioni su alcuni nodi cruciali (per esempio il problema delle sezioni di un cubo, le sezioni di un diedro,...)
- Esaminare percorsi che integrino la geometria piana con quella solida (ad esempio usando *Cabri II Plus* e *Cabri 3D*).
- Sperimentare, usando il software di geometria 3D percorsi che facciano maggiormente uso dei vettori per la risoluzione dei problemi.

Conclusioni (da sperimentare in classe)

- *Cabri 3D* permette di unificare maggiormente la geometria dello spazio con la geometria piana.
- Si può effettivamente insegnare a “vedere nello spazio”.
- Un software innovativo come *Cabri 3D* permette di visualizzare facilmente idee e fatti geometrici nello spazio
- Con *Cabri 3D*, in particolare, è possibile progettare delle attività che portino a formulare congetture anche in situazioni geometriche nello spazio.
- Con questo software di geometria dinamica si può intraprendere qualche strada nuova per l'insegnamento della geometria dello spazio e affrontare l'argomento in modo più motivante.

Riferimenti bibliografici

- Accascina G., Rogora E. (2005), *Using Cabri 3D: First impressions*, Proceedings of the 7th International Conference on Technology in Mathematics Teaching, Bristol, 26-29 July 2005, ed. Olivero F., Sutherland R., pp. 53-60.
- Bainville E. (2004), Alcune costruzioni con Cabri 3D, in *Cabri World 2004, Percorsi di geometria dinamica*, Media Direct, pp. 199-208.
- Mariotti M.A. (2005), *La geometria in classe. Riflessioni sull'insegnamento e apprendimento della geometria*, Pitagora, Bologna.
- Tomasi L. (2003), Geometria dello spazio e visualizzazione: considerazioni su insegnamento e uso del software, in *L'insegnamento della Matematica e delle scienze integrate*, Vol. 26 A-B N. 6, Novembre-Dicembre 2003, pp. 781-798.
- Tomasi L. (2004), Geometria dello spazio, da Cabri II a Cabri 3D: rappresentazione e visualizzazione dinamica, in *Cabri World 2004, Percorsi di geometria dinamica*, Media Direct, pp. 187-198.
- Tomasi L., Bainville E. (2006), *Introduzione a Cabri 3D. Un software per esplorare la geometria dello spazio*, Media Direct, Bassano del Grappa.
- Villani V. (2006), *Cominciamo dal punto*, Pitagora, Bologna.